Дәріс 6

Үш айнымалы толқын теңдеулер үшін Коши есебі. Кирхгоф формуласы

$R^4_{x,t}$ кеңістігінде берілген толқын теңдеуі үшін Коши есебі. $G=\{(\bar{x},t):\bar{x}\in R^3, t>0\}$ - жарты кеңістігінде анықталған

$$U_{tt}=a^2\left(U_{x_1x_1}+U_{x_2x_2}+U_{x_3x_3}\right) \tag{7.2.1}$$

теңдеуін қарастырайық. Коши есебі: (7.2.1) теңдеуінің

$$U(\bar{x},0)=\varphi(\bar{x}),\quad U_t(\bar{x},0)=\psi(\bar{x}),\quad \bar{x}\in R^3 \tag{7.2.2}$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын $C^{2,2}(G)\cap C^{0,1}(\overline{G})$ класында жататын классикалық шешімін табу керек.

Коши есебінің шешімін 7.1.1.-лемма және 7.1.2-лемма тұжырымдарына сүйеніп табамыз. $\mu_1(\bar{y})\in C^2(R^3)$, $\mu_2(\bar{y})\in C^3(R^3)$ белгісіз функциялар болсын. Онда 7.1.1 – лемма және 7.1.2- лемма тұжырымдары бойынша

$$U(\bar{x},t)=\frac{1}{at}\int\limits_{|\bar{y}-\bar{x}|=at}\mu_1(y_1,y_2,y_3)dS_y+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{at}\int\limits_{|\bar{y}-\bar{x}|=at}\mu_2(y_1,y_2,y_3)dS_y\right) \tag{7.2.3}$$

функциясы (7.2.1) теңдеуінің классикалық шешімін анықтайды. Сондықтан бізге белгісіз $\mu_2(\bar{y})$ және $\mu_1(\bar{y})$ функцияларын тапқан жеткілікті. Оларды табу үшін Коши есебінің бастапқы шарттарын пайдаланамыз.

Әуелі бастапқы шарттарды пайдаланбай тұрып (7.2.3) функциясын дифференциалдауға ыңғайлы болу үшін

$$\bar{y}-\bar{x}=\bar{\upsilon}\,a\cdot t\Rightarrow\bar{\upsilon}=\frac{\bar{y}-\bar{x}}{at};\qquad \upsilon_k=\frac{y_k-x_k}{at}=\cos\left(\bar{\upsilon},\hat{y_k}\right)$$

жаңа интегралдау айнымалысын енгіземіз. Бұл жағдайда $S_{at}(\bar{x})$ сферасы

$$S_1(0):|\bar{y}-\bar{x}|=|\bar{\upsilon}|\,at\Rightarrow|\bar{\upsilon}|\,at=at\Rightarrow|\bar{\upsilon}|=1\Leftrightarrow\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_3^2=1$$

центрі 0 нүктесінде орналасқан радиусы 1-ге тең бірлік сфераға көшеді, ал $dS_y=(at)^2d\sigma_\upsilon$ болады. Сондықтан (7.2.3) формуласын

$$U(\bar{x},t)=at\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_1(x_1+\upsilon_1\cdot at,\quad x_2+\upsilon_2\cdot at,x_3+\upsilon_3\cdot at,)d\sigma_\upsilon+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(at\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_2(x_1+\upsilon_1\cdot at,\quad x_2+\upsilon_2\cdot at,x_3+\upsilon_3\cdot at,)d\sigma_\upsilon\right)$$

немесе

$$\begin{aligned}U(\bar{x},t)&=at\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_1(x_1+\upsilon_1\cdot at,\quad x_2+\upsilon_2\cdot at,x_3+\upsilon_3\cdot at)d\sigma_\upsilon+\\&+a\cdot\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_2(x_1+\upsilon_1\cdot at,\quad x_2+\upsilon_2\cdot at,x_3+\upsilon_3\cdot at)d\sigma_\upsilon+a\,t\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mu_2}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial t}d\sigma_\upsilon\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

түрінде жазуға болады. Енді (7.2.4) теңдігінің екі жағынан $t\to0$ арқылы шекке көшеміз

$$\lim_{t\to0}U(\bar{x},t)=a\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_2(x_1,x_2,x_3)d\sigma_\upsilon$$

Бұдан $\lim\limits_{t\to0}U(\bar{x},t)=\varphi(\bar{x})$ екенін ескеріп

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=a\cdot\mu_2(x_1,x_2,x_3)\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}d\sigma_\upsilon$$

немесе

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=a\cdot\mu_2(x_1,x_2,x_3)\cdot 4\pi$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$\mu_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4\pi a}\,\varphi(x_1,x_2,x_3)$$

болатындығын көреміз.

(7.2.4) теңдігін t аргументі бойынша дифференциалдау арқылы

$$\frac{\partial U(\bar{x},t)}{\partial t}=a\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_1(x_1+\upsilon_1 at,\ \ x_2+\upsilon_2 at,\ \ x_3+\upsilon_3 at)d\sigma_\upsilon+at\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mu_1}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial t}d\sigma_\upsilon+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(at\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_2(x_1+\upsilon_1 at,\ \ x_2+\upsilon_2 at,\ \ x_3+\upsilon_3 at)d\sigma_\upsilon\right)\tag{7.2.5}$$

теңдігіне келеміз. $\mu_2(\bar{y})\in C^3(R^3)$ кезде

$$at\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_2(x_1+\upsilon_1 at,\ \ x_2+\upsilon_2 at,\ \ x_3+\upsilon_3 at)d\sigma_\upsilon$$

функциясы (7.2.1) теңдеуінің классикалық шешімін анықтайтын болғандықтан

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(at\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_2(x_1+\upsilon_1 at,\ x_2+\upsilon_2 at,\ x_3+\upsilon_3 at)\,d\sigma_\upsilon\right)=$$
$$=a^2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(at\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_2(x_1+\upsilon_1 at,\ x_2+\upsilon_2 at,\ x_3+\upsilon_3 at)\,d\sigma_\upsilon\right)=a^3\cdot t\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x_k^2}d\sigma_\upsilon$$

Осы теңдікті ескеріп, (7.2.5) теңдігінің екі жағынан $t\to 0$ шекке көшеміз

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial U(\bar{x},t)}{\partial t}=a\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_1(x_1,x_2,x_3)d\sigma_\upsilon+a\lim_{t\to 0}t\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mu_1}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial t}d\sigma_\upsilon+$$
$$+a^3\lim_{t\to 0}t\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x_k^2}\,d\sigma_\upsilon=a\int\limits_{|\bar{\upsilon}|=1}\mu_1(x_1,x_2,x_3)d\sigma_\upsilon=a\mu_1(x_1,x_2,x_3)\cdot 4\pi\tag{7.2.6}$$

Бастапқы шарт бойынша $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial U(\bar{x},t)}{\partial t}=\psi(\bar{x})$. Осыны ескеріп, (7.2.6) теңдігінен $\psi(x_1,x_2,x_3)=4\pi a\,\mu_1(x_1,x_2,x_3)$ теңдігіне келеміз. Бұдан $\mu_1(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{1}{4\pi a}\psi(x_1,x_2,x_3)$ болатындығын аламыз. Табылған $\mu_1(x_1,x_2,x_3)$ және $\mu_2(x_1,x_2,x_3)$ функцияларын (7.2.3) формуласына апарып қойып, Коши есебінің классикалық шешімін табамыз. Сонымен, егер $\varphi(x_1,x_2,x_3)\in C^3(R^3)$ және $\psi(x_1,x_2,x_3)\in C^2(R^3)$ болса, онда

$$U(\bar{x},t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot\int\limits_{|\bar{y}-\bar{x}|=at}\psi(y_1,y_2,y_3)\,dS_y+\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\cdot\int\limits_{|\bar{y}-\bar{x}|=at}\varphi(y_1,y_2,y_3)dS_y\right]\tag{7.2.7}$$

функциясы Коши есебінің классикалық шешімін анықтайтын болады.

Кеңістікте берілген Коши есебінің шешімін анықтайтын (7.2.7) формуласын Кирхгоф формуласы деп атайды. Кирхгоф формуласынан Коши есебіне сәйкес келетін толқын $R^4_{x,t}$ кеңістігінің (x_1,x_2,x_3,t) нүктесінде центрі (x_1,x_2,x_3) нүктесінде орналасқан радиусы $a|t|$-ға тең

$$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2=(at)^2$$

сфера бойында анықталатын $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}$ және ψ функцияларының мәндерімен толық анықталатындығы шығады. Дыбыстар теориясында бұл дәйекті Гюйгенс белгісі деп атайды.